Examen - Convocatoria Ordinaria

[**3 horas**]

- **No está permitido utilizar (ni acceder a) ningún tipo de documentación.**

1. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, se define el proceso

$$Z(t) = B^2(t) - t.$$

   a) Calcula la función de media $\mu(t)$.

   b) Calcula la función de autocovarianza, $\mathbb{C}\text{ov}_Z(s,t)$, cuando $s \leq t$.

   c) ¿Es el proceso $Z(t)$ estacionario en sentido débil o estricto?

   Nota: *una distribución normal estándar tiene momento de orden* 4 *igual a* 3.

   (2 Puntos)

2. Dada la cadena de Markov con estados $\{1,2,3,4\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   y asumiendo que la distribución inicial es

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos.

   b) Indicar si existe la distribución de $X(\infty)$, y en caso afirmativo, cual sería su valor.

   c) Indicar si existe la distribución estacionaria, y cual sería la media y la varianza de la cadena estacionaria.

   d) Calcular el número medio de visitas que la cadena hace al estado 4 en el caso la cadena empiece en el estado 3.

   (3 Puntos)

3. Dada la cadena de Markov en tiempo tiempo continuo con estados $\{1,2,3,4\}$, matriz de transición de la cadena incrustada dada por la matriz del ejercicio anterior y vector q de tasas de cambios igual a

$$q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Caracterizar los estados de la cadena, encontrar el generador y dibujar su diagrama de transición.

   b) Asumiendo que empiece en el estrado 2 calcular la distribución de $X(1/2)$.

   c) Calcular la distribución límite, empezando con la misma distribución inicial del ejercicio anterior.

   (2 Puntos)

4. Considera una empresa cuyo superávit, medido a final de cada año, se puede modelar por medio del siguiente proceso

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}, \quad n \geq 0$$

   y $S_0 = 4$, donde las variable X_n, $n \geq 1$ son idénticamente distribuida y con distribución

$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{con probabilidad } 36.00\,\% \\ +1 & \text{con probabilidad } 64.00\,\% \end{cases}$$

   a) Calcula el valor de $\mathbb{E}[(9/16)^{X_1}]$.

   b) Muestra que el proceso $W_n = (9/16)^{S_n}$ es una martingala.

   c) Define el tiempo T hasta que la empresa quiebre o alcance un valor de superavit igual a 10. Calcula la probabilidad de que una vez llegado a T, la empresa haya quebrado.

   d) Calcula la distribución de S_T y su varianza.

   (3 Puntos)